FI-204 31/03/2020 /1/

§ Errata da última aula: Lagrangianos contendo variáveis complexas e sendo lineares na velocidade

▶ Ref. "Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics", Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupond-Roc and Gilbert Grynberg (C-T/D-R/G)

A Densidade Lagrangiana que fornece a equação de Schrödinger (e sua complexa conjugada) é:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\varphi}\varphi^* - \varphi\dot{\varphi}^*\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi - V\varphi^*\varphi \qquad (1)$$

Aparecem contradições (aparentes) devido ao fato de considerar (por conveniência) φ e φ^* como independentes, o que introduz variáveis dinâmicas redundantes. O cálculo dos momentos canônicos em (1) conduziria a

$$(2) \qquad \pi = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{i\hbar}{2}\varphi^*, \quad \pi^* = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\varphi}^*} = -\frac{i\hbar}{2}\varphi,$$

com um fator 1/2 nas relações de quantização.

O cálculo anterior mostra em si que π e π^* não são independentes de (φ, φ^*), como seria de esperar no formalismo lagrangiano. Precisamos eliminar as variáveis redudantes, para uma definição do ou dos momentos canônicos, para obter a densidade Hamiltoniana e finalmente a correta condição de quantização.

Seguindo a proposta de C-T/D-R/G (p. 154), usamos um Lagrangiano modelo de uma variável complexa z. Seja esse Lagrangiano:

$$L = \frac{i\hbar}{2}\left(z^*\dot{z} - \dot{z}^* z\right) - f(z,z^*) , \qquad (3)$$

onde $f(z,z^*)$ é uma função real de (z,z^*).

Encontramos a eq. de movimento associada a z^*:

$$\frac{\partial L}{\partial z^*} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*}\right) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z^*} = \frac{i\hbar}{2}\dot{z} - \frac{\partial f}{\partial z^*} , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*} = -\frac{i\hbar}{2} z$$

Resulta de (4)

$$\boxed{i\hbar\,\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial z^*}} , \qquad (5)$$

que é uma eq. diferencial a primeira ordem no tempo. Dada a condição inicial $z(t_0)$ obtemos o comportamento posterior $z(t)$. Isso significa que não podemos considerar $(z, z^*, \dot{z}, \dot{z}^*)$ como variáveis independentes. Os 'momentos canônicos' também não poderão ser considerados como independentes:

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{i\hbar}{2} z^* ,$$

$$p_{z^*} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*} = -\frac{i\hbar}{2} z .$$

<u>Solução</u>: Re-escrever o problema usando variáveis reais:

$$z = x + iy ,$$

com $$f(z, z^*) = g(x, y) .$$

Obtemos:

$$L = \hbar (y\dot{x} - x\dot{y}) - g(x, y) , \qquad (6)$$

que ainda tem variáveis redudantes. Sabemos que podemos modificar o Lagrangiano por uma derivada total no tempo:

$$L' = L + \frac{d}{dt}\Omega .$$

O termo extra tem variação nula. No caso presente escolhemos Ω como

$$\Omega = \hbar\, xy$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \hbar(y\dot{x} + x\dot{y}) \longrightarrow \text{somar a } L$$

conduz à:

$$L' = 2\hbar y\dot{x} - g(x,y), \qquad (7)$$

que elimina $\dot{y}$ e uma eq. de Lagrange é imediata:

$$\frac{\partial L'}{\partial y} = 0 = 2\hbar\dot{x} - \frac{\partial}{\partial y} g(x,y),$$

que escrevemos como:

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 2\hbar\dot{x}. \qquad (8)$$

A integração de (8) para y fornece uma solução

$$y = y(x, \dot{x}),$$

que pode ser substituída em (7), resultando num Lagragiano $\tilde{L}'$ que é função de x e $\dot{x}$:

$$\tilde{L}' = 2\hbar\, \dot{x}\, y(x,\dot{x}) - g(x, y(\dot{x},x)).$$

Calculamos:

$$\frac{\partial \tilde{L}'}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} + \underbrace{\frac{\partial L'}{\partial y}}_{0}\left(\frac{\partial y}{\partial \dot{x}}\right),$$

ou seja:
$$\frac{\partial \tilde{L}'}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}.$$

Portanto, obtemos o momentum conjugado por:

$$p_x = \frac{\partial \tilde{L}'}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 2\hbar y,$$

com $y = y(x, \dot{x})$.

Existe portanto apenas um momento canônico p_x (proporcional a y), que é independente de 'x'. Agora podemos obter o Hamiltoniano do sistema por:

$$H = \dot{x} p_x - \tilde{L}' = \cancel{\dot{x} p_x} - \cancel{\dot{x} p_x} + g(x, y(\dot{x}, x))$$

Resultado:

$$H = g(x,y) = g\left(\tfrac{1}{2\hbar} p_x, x\right), \quad (9)$$

que é função das variáveis canônicas (x, p_x).

A quantização via Heisenberg é:

$$[x, p_x] = i\hbar . \qquad (10)$$

Mas temos que $x = \mathrm{Re}\, z = \dfrac{z^* + z}{2}$,

$$p_x = 2\hbar\, \mathrm{Im}\, z = \frac{\hbar}{i}(z - z^*) ,$$

e substituindo em (10), com $z^* \longrightarrow z^\dagger$

$$i\hbar = \left[\frac{z^\dagger + z}{2} , \frac{\hbar}{i}(z - z^\dagger) \right] = -\frac{i\hbar}{2} \left\{ [z^\dagger, z] - \underbrace{\cancel{[z^\dagger, z^\dagger]}}_{0} + \underbrace{\cancel{[z, z]}}_{0} - [z, z^\dagger] \right\}$$

$$= \frac{i\hbar}{\cancel{2}} \cancel{2} [z, z^\dagger]$$

Resultado:

$$\boxed{[z, z^\dagger] = 1} \qquad (11)$$

e o Hamiltoniano pode ser escrito como:

$$H = g\left(\frac{z^\dagger + z}{2} , \frac{z - z^\dagger}{2i} \right) \qquad (12)$$

A relação de comutação (11) resultaria errada se tivessemos considerado os momentos canônicos como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^*} .$$

A Densidade Lagrangiana (1) da teoria de Schrödinger tem a mesma estrutura que o Lagrangiano modelo (3) e fica claro que temos variáveis dinâmicas redundantes. No caso da Densidade Lagrangiana (1) é ainda conveniente considerar φ e φ^* como independentes, mas tentar eliminar uma das velocidades generalizadas. Adicionamos no Lagrangiano um termo que é uma derivada total em relação ao tempo:

$$L' = L + \frac{d}{dt}\int d^3x \left(\frac{i\hbar}{2} \varphi^* \varphi \right) =$$

$$= L + \int d^3x \, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i\hbar}{2} \varphi^* \varphi \right).$$

Equivale a mudar a Densidade Lagrangiana por:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 + \frac{i\hbar}{2}\left(\dot{\varphi}^* \varphi + \varphi^* \dot{\varphi} \right).$$

Resulta:

$$\boxed{\mathcal{L}' = i\hbar\varphi^*\dot{\varphi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi - V\varphi^*\varphi} \quad (13)$$

A Densidade equivalente, não depende da velocidade (generaliza) $\dot{\varphi}^*$. Note que as eq.'s de E-L fornecem a eq. de Schrödinger e a sua complexa conjugada (como deve ser):

(a) $$0 = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi^*} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\varphi^*}$$

ou:

$$0 = i\hbar\dot{\varphi} - V\varphi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi \,, \quad \checkmark$$

(b) $$0 = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi} - \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\varphi}} - \nabla\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\varphi} \,,$$

ou:

$$0 = -V\varphi^* - i\hbar\dot{\varphi}^* + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi^* \quad \checkmark$$

Embora a densidade (13) seja complexa, sabemos que ela é equivalente a uma densidade real (de $\mathcal{L}$). A diferença é que agora temos um único momento canônico, dado por:

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\dot{\varphi}} = i\hbar\varphi^* , \quad (14)$$

que é proporcional a φ^* e portanto independente.

A Densidade Hamiltoniana agora é obtida por:

$$\mathcal{H}' = \dot{\varphi}\Pi - \mathcal{L}' = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi + V\varphi^*\varphi .$$

A quantização canônica 'alla Heisenberg' fornece:

(15) $$\left[\varphi(\vec{x},t), \Pi(\vec{x}',t)\right] = i\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

e substituindo a relação (14) obtemos:

(16) $$\left[\varphi(\vec{x},t), \varphi^\dagger(\vec{x}',t)\right] = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}'),$$

mudando φ^* por $\varphi^\dagger$ no processo de quantização.

O Hamiltoniano é dado por integração de $\mathcal{H}$:

$$H = \int d^3x\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi + V\varphi^*\varphi\right)$$

'integração por partes':

$$\nabla\varphi^*\cdot\nabla\varphi = \nabla\cdot(\varphi^*\nabla\varphi) - \varphi^*\nabla^2\varphi .$$

O termo do Div é transformado numa integração de superfície (Gauß) que se anula em ∞.

Assim:

$$H = \int d^3x \; \varphi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \varphi \, ,$$

que depois de quantizar resulta em:

$$\boxed{H = \int d^3x \; \varphi^\dagger(\vec{x}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right] \varphi(\vec{x}) .} \quad (17)$$

Podemos continuar pensando que φ e φ^* são independentes, mas sempre sujeitas as relaçoes de comutação:

$$[\varphi(\vec{x},t), \varphi(\vec{x}',t)] = 0 , \quad [\varphi^\dagger(\vec{x},t), \varphi^\dagger(\vec{x}',t)] = 0 ,$$

$$[\varphi(\vec{x},t), \varphi^\dagger(\vec{x}',t)] = \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x})$$

Ex. Calcular, na versão de Heisenberg, a eq. de movimento de $\varphi(\vec{x},t)$:

$$\frac{d}{dt} \varphi(\vec{x},t) = -\frac{1}{i\hbar} \left[H , \varphi(\vec{x},t) \right]$$

com : $$H = \int d^3x' \, \varphi^\dagger(\vec{x}',t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2_{x'} + V(\vec{x}') \right\} \varphi(\vec{x}',t)$$

Resulta:

$$\left[H, \varphi(\vec{x},t)\right] = \int d^3x' \left\{ \left[\varphi^\dagger(\vec{x}',t), \varphi(\vec{x},t)\right] \times \right.$$
$$\left. \times\, h(\vec{x}')\ \varphi(\vec{x}',t) \right\}$$

pq $\varphi(\vec{x},t)$ comuta com $\varphi(\vec{x}',t)$. Escrevemos

$$h(\vec{x}') \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_{x'} + V(\vec{x}'),$$

logo

$$\left[H, \varphi(\vec{x},t)\right] = -\int d^3x'\ \delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x})\ h(\vec{x}')\,\varphi(\vec{x}',t)$$

$$= - \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_x + V(\vec{x})\right\} \varphi(\vec{x},t)$$

e obtemos:

$$(a') \qquad i\hbar \frac{d}{dt}\varphi(\vec{x},t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2_x + V(\vec{x})\right\} \varphi(\vec{x},t)$$

O operador $\varphi(\vec{x},t)$ satisfaz equação análoga à eq. de Schrodinger: Expandimos $\varphi(\vec{x},t)$ em operadores de partículas na representação da energia:

$$h\,\phi_k = \varepsilon_k\,\phi_k$$

Substituindo

$$\varphi(\vec{x},t) = \sum_k a_k(t)\, \phi_k(\vec{x})$$

em (2') obtemos:

$$i\hbar \sum_k \dot{a}_k(t)\phi_k(\vec{x}) = \sum_k a_k(t)\, \varepsilon_k\, \phi_k(\vec{x})$$

e como $\{\phi_k\}$ é uma base completa, obtemos:

$$i\hbar\, \dot{a}_k(t) = \varepsilon_k\, a_k(t)$$

ou

$$\dot{a}_k(t) = -i\frac{\varepsilon_k}{\hbar}\, a_k(t).$$

A integração fornece:

$$a_k(t) = a_k(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_k t},$$

onde $a_k(0)$ é o operador de destruição na versão de Schrödinger.

Ex. Para partículas interagentes, devemos incluir um potencial $V_1(\vec{x},\vec{x}')$ de interação entre elas. Mostre que, em 2ª quantização, a eq. de movimento satisfeita pelo campo $\varphi(\vec{x},t)$ tem a forma (versão de Heisenberg):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \varphi(\vec{x},t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}) \right\} \varphi(\vec{x},t) +$$

$$+ \left[\int d^3x' \, \varphi^{+}(\vec{x}',t)\, V(\vec{x},\vec{x}')\, \varphi(\vec{x}',t) \right] \varphi(\vec{x},t) \,,$$

com um potencial extra não local devido ás outras partículas

§ Teorema de Noether: Simetrias e Leis de Conservação

Olhamos para a variação da ação num outro contexto:

$$\delta S = \int_{R'} d^4x \, \partial_\mu \left[\delta\varphi \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right] + \int_{R'} d^4x \, \delta\varphi \left[\mathcal{L}_0 \right]_\varphi \, . \quad (1)$$

Tratamos de transformações dos campos e suas derivadas que deixam a Ação invariante. O campo também satisfaz as eq.'s de E-L, que são invariantes pela transformação. Chamamos a essa transformação como

$$\boxed{\text{Simetria.}}$$

Agora o volume de integração R' é arbitrário e não impomos nenhuma condição de contorno do campo.

A transformação $\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$ deixa a Ação invariante. Portanto:

$$\delta S = 0 \, .$$

As eq.'s de E-L são satisfeitas, ou seja:

$$\left[\mathcal{L}_0\right]_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0$$

Obtemos:

$$\int_{R^\nu} d^4x \;\; \partial_\mu \left[\delta\varphi \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right] = 0 . \qquad (2)$$

Como o volume de integração é arbitrário, implica:

$$\partial_\mu \left[\delta\varphi \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right] = 0 ,$$

que mostra que a grandeza (Densidade de Corrente)

$$\tilde{J}^\mu \equiv \delta\varphi \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \qquad (3)$$

é conservada.

Teorema (Noether). Toda simetria do sistema está associada a uma Lei de Conservação

Transformação de Gauge

Como exemplo, consideramos aqui o caso particular (importante) de uma transformação de Gauge:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi \to \varphi' = e^{-i\varepsilon}\varphi \quad , \quad (\varepsilon \ll 1) \\ \varphi' \cong (1-i\varepsilon)\varphi = \varphi - i\varepsilon\varphi \, . \\ \text{Identificamos:} \quad \delta\varphi = -i\varepsilon\varphi, \ \delta\varphi^* = i\varepsilon\varphi^* \end{array}\right\} (*)$$

Sabemos que uma fase global deixa a eq. de Schrödinger invariante.

<u>Pergunta</u>: Qual é a correspondente lei de conservação?

<u>Def.</u>

$$-i\varepsilon J^\mu \equiv \frac{1}{i\hbar}\tilde{J}^\mu$$

Lembrar que precisamos considerar a contribuição do campo φ^*

$$\tilde{J}^\mu = -i\varepsilon\left[\varphi\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} - \varphi^*\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right]$$

Para a teoria de Schrödinger, usamos a Densidade Lagrangiana $\mathcal{L}'$:

$$\mathcal{L}' = i\hbar \varphi^* \dot{\varphi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \varphi^* \cdot \nabla \varphi - V \varphi^* \varphi$$

e obtemos:

$$\cancel{i\hbar} J^0 = \cancel{i\hbar} \varphi \varphi^* \Rightarrow J^0 = \varphi^* \varphi \quad (4)$$

Também:

$$\cancel{i\hbar} \vec{J} = \left[\varphi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \varphi} \right) - \varphi^* \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \varphi^*} \right) \right] \frac{1}{i\hbar}$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left(\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^* \right) \quad (5)$$

Na teoria de Schrödinger, obtemos uma eq. de continuidade que fornece a conservação da probabilide:

$$\rho \equiv \varphi^* \varphi \quad : \text{ Densidade de probabilidade}$$

Eq. de conservação:

$$\partial_t \rho = - \nabla \cdot \vec{J} \quad (6)$$

Em 2ª quantização, o operador

$$J^0 = \varphi^\dagger \varphi ,$$

representa a densidade de partículas e a grandeza conservada é o número de partículas.

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\varphi^\dagger \nabla\varphi - (\nabla\varphi^\dagger)\varphi\right]$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\int_R d^3x\, \varphi^\dagger\varphi$$

$$= \int_R d^3x\, \partial_t(\varphi^\dagger\varphi) = -\int_R d^3x\, \nabla\cdot\vec{J}$$

$$= -\int_{\partial R} d\vec{\sigma}\cdot\vec{J} = 0$$

representa o fluxo de partículas em ∞.
Resultado:

$$\frac{dN}{dt} = 0 \qquad (7)$$

'N é conservado' $\Longrightarrow$ $[N, H] = 0$.

Portanto, o fato da Densidade Lagrangiana ser invariante por uma fase global arbitrária, conduz à conservação do número de partículas.

Este teorema sugere que existe uma ligação entre a fase e o operador (número de partículas) (Dirac, 1927).

Pergunta: Poderia existir o contrário, isto é termos uma fase constante e não conservação do número de partículas?

A transformação (*) é chamada Transformação de Gauge de 1ª Espécie.

Na Transformação de Gauge de 2ª Espécie, temos uma mudança local da fase

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\varepsilon(t,\vec{x})}\varphi$$

com
$$\begin{cases} \delta\varphi = -i\,\delta\varepsilon(\vec{x},t)\,\varphi\,, \\ \delta\varphi^* = +i\,\delta\varepsilon(\vec{x},t)\,\varphi^*. \end{cases}$$

É fácil ver que a Densidade Lagrangiana $\mathcal{L}_0$ em (13) não é invariante por essa transformação, porque as derivadas não são covariantes

$$\dot{\varphi} = \partial_t\varphi \rightarrow \partial_t\left(e^{-i\varepsilon}\varphi\right) = e^{-i\varepsilon}\dot{\varphi} - i\,\varphi(\partial_t\varepsilon)\,e^{-i\varepsilon}$$

Cód. 1726

$$\nabla\varphi \longrightarrow \nabla(e^{-i\varepsilon}\varphi) = e^{-i\varepsilon}\nabla\varphi - i\,\varphi(\nabla\varepsilon)e^{-i\varepsilon}$$

isto é:

$$\partial_t\varphi \rightarrow e^{-i\varepsilon}\left[\partial_t\varphi - i\,\varphi(\partial_t\varepsilon)\right],$$

$$\nabla\varphi \rightarrow e^{-i\varepsilon}\left[\nabla\varphi - i\,\varphi(\nabla\varepsilon)\right],$$

onde o fator $e^{-i\varepsilon}$ é eliminado quando multiplicamos pelo complexo conjugado. Portanto por uma TG1ε, as derivadas variam como:

$$\partial_t \xrightarrow{\varepsilon} \partial_t - i(\partial_t\varepsilon),$$

$$\nabla \xrightarrow{\varepsilon} \nabla - i\nabla\varepsilon,$$

e usando a notação relativística, temos

$$\partial_\mu \xrightarrow{\varepsilon} \partial_\mu - i\partial_\mu\varepsilon.$$

Podemos assim obter 'derivadas covariantes', introduzindo uma grandeza A_μ na DL, que transforma como:

$$A_\mu \xrightarrow[TG2\varepsilon]{\varepsilon} A_\mu + \partial_\mu\varepsilon \qquad (TG)$$

Def. Derivada covariante, D_μ

$$\boxed{D_\mu \equiv \partial_\mu + i A_\mu} \qquad (8)$$

As grandezas auxiliares A_μ são chamadas 'Campos de Gauge'.

Verificamos que D_μ transforma covariantemente por uma transformação de gauge de 2ª espécie (TG2E)

$$D_\mu\left(e^{-i\varepsilon}\varphi\right) \Rightarrow \left(\partial_\mu + i A_\mu + i\partial_\mu \varepsilon\right) e^{-i\varepsilon}\varphi$$

$$= e^{-i\varepsilon}\left(\partial_\mu \cancel{- i\partial_\mu \varepsilon} + i A_\mu \cancel{+ i\partial_\mu \varepsilon}\right)\varphi$$

$$= e^{-i\varepsilon}\left(D_\mu \varphi\right) \qquad (9)$$

e sobre o conjugado

$$\partial_\mu\left(e^{i\varepsilon}\varphi^*\right) = i e^{i\varepsilon}(\partial_\mu \varepsilon)\varphi^* + e^{i\varepsilon}\partial_\mu \varphi^*$$

$$= e^{i\varepsilon}\left(\partial_\mu \varphi^* + i(\partial_\mu \varepsilon)\varphi^*\right)$$

$$= e^{i\varepsilon}\left[\partial_\mu + i(\partial_\mu \varepsilon)\right]\varphi^*$$

e para termos covariância precisamos de

$$D_\mu^* = \partial_\mu - i A_\mu \qquad (10)$$

Verificamos a covariância

$$\nabla(e^{i\varepsilon}\varphi^*) \xrightarrow{TG2\varepsilon} (\partial_\mu - iA_\mu - i\partial_\mu \varepsilon) e^{+i\varepsilon}\varphi^*$$

$$= e^{i\varepsilon}\left(\partial_\mu\varphi^* + \cancel{i(\partial_\mu\varepsilon)\varphi^*} - \cancel{i(\partial_\mu\varepsilon)\varphi^*} - iA_\mu\varphi^*\right)$$

$$= e^{i\varepsilon}(\partial_\mu - iA_\mu)\varphi^*$$

$$= e^{i\varepsilon} D_\mu^*\varphi^*$$

ou seja:

$$D_\mu^*(e^{+i\varepsilon}\varphi^*) \xrightarrow{TG2\varepsilon} e^{i\varepsilon} D_\mu^*\varphi^*$$

("O campo de Gauge carrega a constante de acoplamento").

Para termos uma notação uniforme, escrevemos

$$\frac{\partial}{\partial t} = c\frac{\partial}{\partial(ct)} \equiv c\frac{\partial}{\partial x_0} = c\,\partial_0 ,$$

onde 'c' é a velocidade da luz (mas isso por conveniência, pois a métrica espacial é euclideana?)

$\boxed{\text{Covariância, aqui significa que as derivadas transformam da mesma maneira que o campo.}}$

$$(**) \quad \begin{cases} \varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\varepsilon}\varphi \,, \\ D_\mu \varphi \rightarrow (D_\mu \varphi)' = e^{-i\varepsilon}(D_\mu \varphi) . \end{cases}$$

Explicitamos em A_μ a constante de acoplamento 'g' do campo de gauge:

$$A_\mu \longrightarrow \frac{e}{c\hbar} A_\mu \,,$$

'$g = \frac{e}{c\hbar}$' está ligada ao quantum de fluxo:

$$\Phi_0 = 2\pi \frac{\hbar c}{|e|} = \frac{2\pi}{|g|}$$
$$\simeq 4.14 \times 10^{-7} \, (\text{Gauss} - \text{cm}^2)$$

A Densidade Lagrangiana invariante de Gauge (2ª) fica:

$$\mathcal{L}_g = i\hbar c \, \varphi^* (D_0 \varphi) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla + i \frac{e}{c\hbar} A_\mu\right) \varphi \cdot \qquad (11)$$
$$\cdot \left(\nabla - i \frac{e}{c\hbar} A_\mu\right) \varphi^* - V \varphi^* \varphi$$

O campo A_μ foi chamado 'historicamente' de Campo electromagnetico e a constante 'e' de 'carga elétrica' das partículas representadas pelo campo φ.

A notação usual é

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A})$$

ϕ : 'potencial eléctrico'

$\vec{A}$: (vetor potencial)

O primeiro termo da Densidade (11) é:

$$i\hbar c \varphi^* (D_0 \varphi) = i\hbar c \varphi^* \left(\partial_0 \varphi + i \frac{e}{c\hbar} \phi \right) =$$

$$= i\hbar \varphi^* \dot{\varphi} - e\phi \, \varphi^* \varphi$$

$e\varphi^*\varphi$ é agora ($e\varphi^+\varphi$) a densidade de carga e se acopla com o potencial ϕ.

A DLo de gauge completa fica:

$$\mathcal{L}_g = i\hbar\varphi^*\dot{\varphi} - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + i\frac{e}{c\hbar}\vec{A}\right)\varphi^* \cdot \left(\nabla - i\frac{e}{c\hbar}\vec{A}\right)\varphi - V\varphi^*\varphi - e\phi\varphi^*\varphi \qquad (12)$$

Outra vez, existe apenas um momento canônico para o campo φ, dado por:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{\varphi}} = i\hbar\varphi^*,$$

como antes. Obtemos a Densidade Hamiltoniana por:

$$\mathcal{H}_g = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + i\frac{e}{c\hbar}\vec{A}\right)\varphi^* \cdot \left(\nabla - \frac{ie}{c\hbar}\vec{A}\right)\varphi + e\phi\varphi^*\varphi + V\varphi^*\varphi,$$

com Hamiltoniano:

$$\boxed{H_g = \int d^3x \left\{ \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\nabla + i\frac{e}{c\hbar}\vec{A}\right)\varphi^*\right] \cdot \left[\left(\nabla - \frac{ie}{c\hbar}\vec{A}\right)\varphi\right] + \varphi^*(V + e\phi)\varphi \right\}}$$

<u>Problema</u>. Obter a eq. de Schrödinger com campo, usando (E-L) para a DL (12).

Cód. 1726